Durée de l'épreuve : 3 heures

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4.

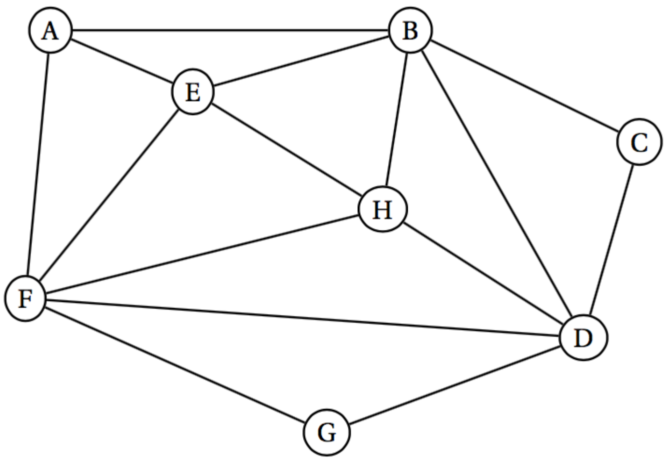
L'utilisation d'une calculatrice en mode examen est autorisée.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter les 4 exercices correspondants à son choix de spécialité. Les candidats de ES ayant choisi la spécialité mathématiques doivent traiter l'exercice 1 sur une copie séparée.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points)

Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

La coopérative LAFRUITIERE collecte le lait de 7 exploitations de montagne. La situation géographique est représentée par le graphe ci-dessous, noté G_L. La coopérative est située au sommet A, les autres sommets B, C, D, E, F, G et H représentent les différentes exploitations ; les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



Partie A

1. (a) Le graphe G_L est-il complet ? Justifier.

   (b) Le graphe G_L est-il connexe ? Justifier.

2. Est-il possible d'organiser une tournée de toutes les exploitations en partant de A et en terminant en A et en passant au moins une fois par chaque client, tout en empruntant une fois et une seule chaque route ? Justifier la réponse.

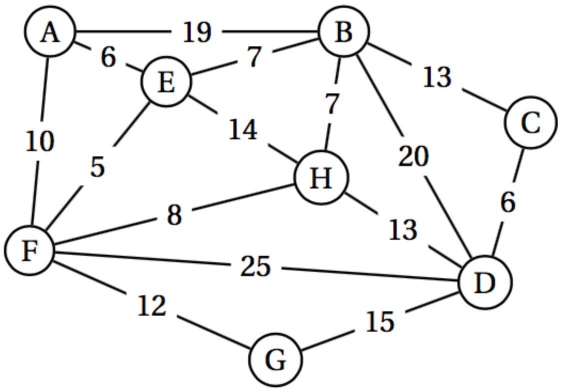
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe G_L (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A à H.
Indiquer ces chemins.

Partie B

Les arêtes sont pondérées par les distances entre les exploitations, exprimées en kilomètres. La coopérative doit collecter du lait provenant de l'exploitation D ; quel est le plus court parcours pour se rendre de A à D ? Justifier.



Exercice 2 (5 points)

Commun à tous les candidats

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de $1\,500$ m^2 entièrement engazonné. Mais tous les ans, $20\,\%$ de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50 m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n, on note U_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne $2010 + n$. On a donc $U_0 = 1\,500$.

1. Calculer U_1.
2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $U_{n+1} = 0,8U_n + 50$.
3. On considère la suite (V_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $V_n = U_n - 250$.
   (a) Démontrer que la suite (V_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Exprimer V_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $U_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$.
   (c) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 6 années ?
4. (a) Déterminer, par la méthode de votre choix, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que : $250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500$. Interpréter le résultat obtenu.
   (b) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour que la variable N contienne la solution obtenue à la question précédente en fin d'exécution.

```
U ⟵ 1 500
N ⟵ 0
Tant que ...........
    U ⟵ ...........
    N ⟵ ...........
Fin Tant que
```

5. Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain.
   A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Une association de consommateurs a fait une enquête sur des ventes de sacs de pommes.
On sait que :

- $15\,\%$ des sacs sont vendus directement dans l'exploitation agricole et le reste est vendu dans des supermarchés.
- Parmi les sacs vendus directement dans l'exploitation agricole, $80\,\%$ contiennent des pommes de variétés différentes et les autres ne contiennent qu'un seul type de pommes.
- $8,5\,\%$ des sacs sont vendus dans des supermarchés et contiennent des pommes de variétés différentes.

On désigne par E l'évènement « les sacs de pommes sont vendus sur l'exploitation » et par V l'évènement « les sacs contiennent des pommes de variétés différentes ».
L'évènement contraire de l'évènement A sera noté $\overline{\mathrm{A}}$.
On achète de façon aléatoire un sac de pommes.

1. Traduire les trois données de l'énoncé en termes de probabilités en utilisant la notation adéquate.
2. Construire un arbre pondéré traduisant cette situation. *On le complétera par la suite d'une couleur différente.*
3. Définir par une phrase l'évènement $E \cap V$ puis calculer sa probabilité.
4. Calculer la probabilité $p_{\overline{E}}(V)$. Interpréter ce résultat.
5. Montrer que la probabilité que le sac acheté contienne des pommes de variétés différentes est égale à $0,205$.
6. Le sac acheté contient des pommes d'une seule variété. Calculer la probabilité qu'il ait été acheté directement sur l'exploitation agricole, arrondir le résultat à $0,001$ près.
7. Des producteurs, interrogés lors de l'enquête, disposent ensemble de $45\,000$ sacs. Dans l'exploitation agricole, un sac contenant un seul type de pommes est vendu $1,20$ euros et un sac contenant différents types de pommes est vendu $0,80$ euros. Dans les supermarchés, chaque sac, qu'il contienne un seul type de pommes ou des pommes de variétés différentes, est vendu $3,40$ euros.
   Calculer le montant total des ventes qu'ils peuvent prévoir.

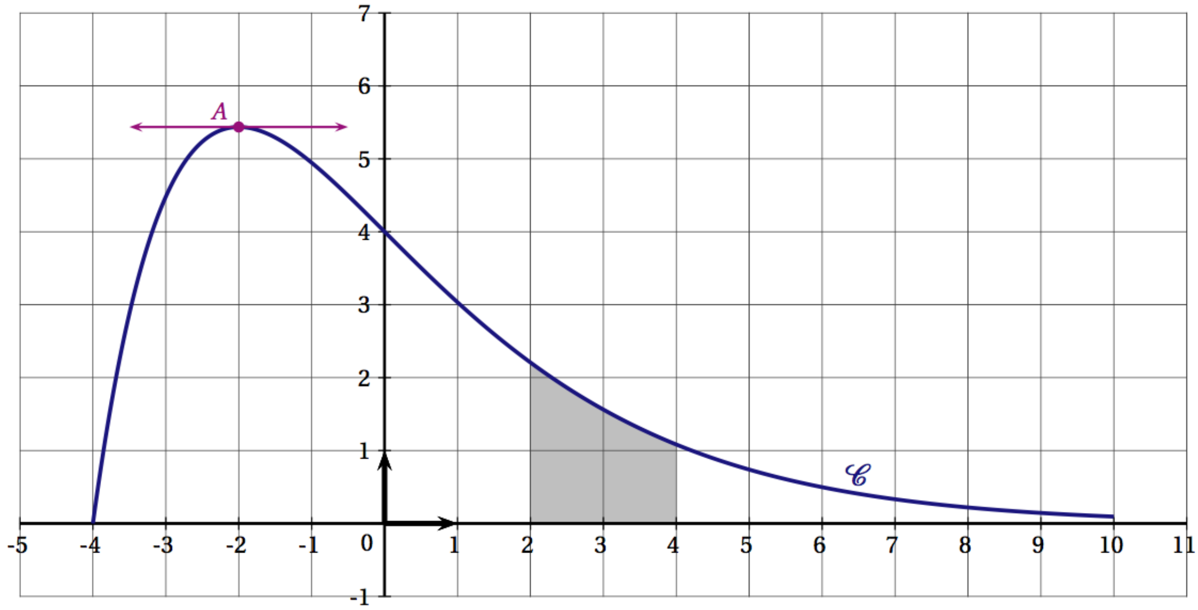
Exercice 4 (5 points)

Commun à tous les candidats

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$. On note f' la fonction dérivée de f, et f'' sa dérivée seconde.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse -2 est parallèle à l'axe des abscisses.

Le domaine S grisé sur la figure est le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = 2$ et la droite d'équation $x = 4$.



Partie A

1. Déterminer, en la justifiant, la valeur de $f'(-2)$.
2. Par une lecture graphique, quel semble être le signe de $f'(4)$?
3. Déterminer, par une lecture graphique, un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire du domaine S grisé sur la figure.

Partie B

La fonction f précédente est définie sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$ par $f(x) = (x+4)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

1. (a) Montrer que $f'(x) = (-0,5x-1)\mathrm{e}^{-0,5x}$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$.

   (c) Montrer que sur l'intervalle $[1\ ;\ 6]$ l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution.
   On notera α cette unique solution.

   (d) Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.
2. On admet que la dérivée seconde de f est définie par $f''(x) = 0,25x\mathrm{e}^{-0,5x}$.

   (a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ 10]$.

   (b) En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion I dont on calculera les coordonnées.